

# Über das optische Kernmodell<sup>†</sup>

Von FRANCISCO MEDINA NICOLAU \*

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München  
(Z. Naturforsch. 16 a, 603—611 [1961]; eingegangen am 22. Dezember 1960)

In this paper we derive the SCHRÖDINGER equation satisfied by the neutron wave function when this is averaged over an energy interval which is much greater than the average level spacing between the resonances of the compound nucleus. The potential involved in this equation is a non-local one, and is given in terms of the interaction between the neutron and the target nucleus and the wave functions of the target and the compound nucleus. The wave function of the system is totally antisymmetrized in order to satisfy the PAULI exclusion principle. Using a SERBER force for the two body interactions and a FERMI gas model for the wavefunctions of the target and the compound nucleus, we estimate the magnitude of the real and imaginary parts of the potential used in the optical model of the nucleus.

In der hier vorgelegten Ableitung des optischen Kernmodells für Kernreaktionen mit Neutronen niedriger Energie<sup>1</sup> benutzen wir einen Formalismus, der große Ähnlichkeit mit der Methode des Stoß-Komplexes<sup>2, 3</sup> (collision complex) besitzt. Die Abweichung von den üblichen Formalismen<sup>4, 5</sup> besteht in der Weise, in welcher die Wellenfunktion des Systems im inneren Gebiete des Konfigurationsraumes, dem Gebiet, in welchem alle Teilchen des Systems sehr stark miteinander in Wechselwirkung treten, ausgedrückt ist. In diesem Gebiet entwickelt man gewöhnlich nach einem diskreten und vollständigen System von Funktionen, die Eigenfunktionen der gesamten HAMILTON-Funktion sind und bestimmte Grenzbedingungen am Rande des inneren Gebietes befriedigen.

In dieser Arbeit dagegen setzen wir die Wellenfunktion der Relativbewegung des Eingangskanals im inneren Gebiet fort und drücken sie in der Entwicklung der Wellenfunktion des ganzen Systems explizit aus. Unter Benutzung einer zweckmäßigen Gewichtsfunktion mitteln wir dann die Wellenfunktion der Relativbewegung über die Energie und finden, daß die so gewonnene Funktion eine SCHRÖDINGER-Gleichung mit einem nicht lokalen Potential befriedigt, für welches das vom optischen Kernmodell benutzte lokale und komplexe Potential einer Näherung entspricht<sup>6</sup>.

In dem hier aufgestellten Formalismus ist das PAULI-Prinzip sehr einfach zu befriedigen, indem

man die Wellenfunktion des Systems antimetrisch in den Koordinaten aller Teilchen schreibt.

Wir finden in Abschnitt 1 die Gleichung für die Amplitude der Relativbewegung und leiten in Abschnitt 2 für Einkanalreaktionen die Gleichung ab, die die gemittelte Wellenfunktion der Relativbewegung befriedigen muß. In Abschnitt 3 berücksichtigen wir das PAULI-Prinzip, nehmen eine SERBER-Kraft zwischen den Nukleonen an und schätzen unter einigen vereinfachenden Annahmen den Wert des Real- und Imaginärteils des komplexen Potentials ab.

## 1. Allgemeiner Formalismus

Es sei  $\Psi_\alpha$  eine Eigenfunktion des Gesamt-HAMILTON-Operators  $H$  des Systems; der zugehörige Energieeigenwert sei  $E$

$$H \Psi_\alpha = E \Psi_\alpha. \quad (1)$$

Da wir ein Streuproblem behandeln, liegt der Eigenwert  $E$  im Kontinuum. Der Index  $\alpha$  weist auf den Eingangskanal hin; wir betrachten eine Kernreaktion, die im Kanal  $\alpha$  begonnen hat. Ein Kanal wird im allgemeinen definiert durch die inneren Quantenzahlen, wie Anregungsenergie, Spin usw. des einlaufenden Teilchens und Zielkerns bzw. auslaufenden Teilchens. Im beliebigen Kanal  $\beta$  seien die Wellenfunktionen für die innere Struktur dieser Teilchen durch  $\chi_\beta'$ ,  $\chi_\beta''$ , usw. gegeben; sie sind Eigenfunktionen von HAMILTON-Operatoren  $H_{\beta'}$ ,  $H_{\beta''}$ , usw. mit

<sup>4</sup> E. P. WIGNER u. L. EISENBUD, Phys. Rev. 72, 29 [1947].

<sup>5</sup> P. L. KAPUR u. R. PEIERLS, Proc. Roy. Soc., Lond. A 166, 277 [1938].

<sup>6</sup> Ähnliche Ergebnisse sind in einer Arbeit von FESHBACH<sup>7</sup> enthalten.

<sup>7</sup> H. FESHBACH, Ann. Phys., Lpz. 5, 357 [1958].

<sup>†</sup> D 7.

\* Gegenwärtige Adresse: Instituto de Fisica de la Universidad de Mexico, Mexico D.F.

<sup>1</sup> H. FESHBACH, C. PORTER u. V. WEISSKOPF, Phys. Rev. 96, 448 [1954].

<sup>2</sup> H. A. BETHE, Rev. Mod. Phys. 9, 69 [1937].

<sup>3</sup> N. F. MOTT u. A. S. W. MASSEY, The Theory of Atomic Collisions, Oxford 1949.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

$E_{\beta'}$ ,  $E_{\beta''}$ , usw. als Eigenwerten. Wir nehmen an, daß die innere Wellenfunktion jedes Teilchens das PAULI-Prinzip befriedigt.

Wenn wir uns auf Kanäle beschränken, die nur je zwei Teilchen enthalten, ist das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion im Kanal  $\beta$  durch

$$\Psi_a \simeq \varphi_{a\beta}(r_\beta) \chi_\beta \quad (r_\beta \rightarrow \infty) \quad (2)$$

gegeben. Hier steht  $\chi_\beta$  für das Produkt der Wellenfunktionen  $\chi_{\beta'}$  und  $\chi_{\beta''}$  der im Kanal  $\beta$  anwesenden Teilchen. Die Funktion  $\chi_\beta$  befriedigt die Gleichung

$$H_\beta \chi_\beta = E_\beta \chi_\beta, \quad (3)$$

wobei  $H_\beta = H_{\beta'} + H_{\beta''}$  die Summe der HAMILTON-Funktionen der Teilchen im Kanal  $\beta$  ist und  $E_\beta = E_{\beta'} + E_{\beta''}$  die Summe der inneren Energien; sie erfüllt die Normierungsbedingung

$$(\chi_\beta, \chi_\beta) = 1. \quad (4)$$

Die Funktion  $\varphi_{a\beta}$ , die nur vom Vektor  $r_\beta$  der relativen Lage abhängt, ist die Wellenfunktion der Relativbewegung in diesem Kanal. Wenn  $r_\beta$  gegen Unendlich geht, enthält  $\varphi_{a\beta}$  für  $\beta \neq \alpha$  nur eine auslaufende Welle und für  $\beta = \alpha$  ein- und auslaufende Wellen.

Für beliebige  $r_\beta$  definieren wir nun die Wellenfunktion der Relativbewegung im Kanal  $\beta$  als<sup>8</sup>

$$\varphi_{a\beta}(r_\beta) = (\chi_\beta, \Psi_a)_{r_\beta}, \quad (5)$$

obwohl der Begriff von Relativbewegung problematisch wird in Bereichen, in denen die Teilchen verschmelzen. Für große  $r_\beta$  reproduziert die rechte Seite von Gl. (5) wegen Gl. (4) die in Gl. (2) eingeführte Funktion  $\varphi_{a\beta}(r_\beta)$ .

Für alle Punkte des Konfigurationsraumes können wir dann schreiben

$$\Psi_a = \sum_\beta \varphi_{a\beta}(r_\beta) \chi_\beta + \Psi_a'. \quad (6)$$

Aus Gl. (2) schließt man sofort, daß  $\Psi_a'$  Null sein muß für  $r_\beta \rightarrow \infty$ . Wir führen nun folgende Definitionen ein

$$\Phi_a = \sum_\beta \varphi_{a\beta} \chi_\beta \quad (7)$$

und  $\Phi_{a\beta} = \sum_{\gamma \neq \beta} \varphi_{a\gamma} \chi_\gamma + \Psi_a'.$  (8)

Aus Gl. (5) folgt  $(\chi_\beta, \Phi_{a\beta})_{r_\beta} = 0.$  (9)

Um eine Gleichung für  $\varphi_{a\beta}$  zu erhalten, bilden wir das skalare Produkt von Gl. (1) mit  $\chi_\beta$ , das wegen Gl. (8) die Form

$$(\chi_\beta, (H - E) \varphi_{a\beta} \chi_\beta)_{r_\beta} = -(\chi_\beta, (H - E) \Phi_{a\beta})_{r_\beta} \quad (10)$$

annimmt. Auf Grund der Gln. (3) und (4) kann die linke Seite von Gl. (10) geschrieben werden als

$$(T_\beta - \varepsilon_\beta) \varphi_{a\beta} + (\chi_\beta, V_\beta \chi_\beta \varphi_{a\beta})_{r_\beta}, \quad (11)$$

wobei  $T_\beta$  der Operator der Relativbewegung,  $\varepsilon_\beta = E - E_\beta$  die kinetische Energie der Relativbewegung der Teilchen für  $r_\beta \rightarrow \infty$  und  $V_\beta$  ihre Wechselwirkung im Kanal  $\beta$  sind. Die rechte Seite von Gl. (10) hat wegen Gl. (9) die Gestalt

$$(\chi_\beta, H_\beta \Phi_{a\beta})_{r_\beta} + (\chi_\beta, V_\beta \Phi_{a\beta})_{r_\beta}. \quad (12)$$

Wir zeigen jetzt, daß in Gl. (12) der erste Term verschwindet. Dazu wenden wir den GREENSchen Satz an in jenem Teil des Konfigurationsraumes, in dem die Wellenfunktion  $\chi_\beta$  definiert ist. Da diese einen gebundenen Zustand darstellt, verschwindet sie an der Oberfläche dieses Gebietes, d. h. wenn die inneren Ortskoordinaten der Teilchen im Kanal  $\beta$  gegen unendlich streben. Damit geben die Oberflächenterme im GREENSchen Satz keinen Beitrag. Wegen Gln. (3) und (9) gilt also

$$(\chi_\beta, H_\beta \Phi_{a\beta})_{r_\beta} = (H_\beta \chi_\beta, \Phi_{a\beta})_{r_\beta} = E_\beta (\chi_\beta, \Phi_{a\beta}) = 0. \quad (13)$$

Wegen Gln. (11), (12) und (13) können wir also Gl. (10) in der Form

$$(T_\beta - \varepsilon_\beta) \varphi_{a\beta} = -(\chi_\beta, V_\beta \Psi_a)_{r_\beta} \quad (14)$$

schreiben. Gl. (14) kann übrigens auch direkt aus der Definition, Gl. (5) durch Anwendung des Operators  $(T_\beta - E_\beta)$  abgeleitet werden.

Mit WIGNER<sup>4</sup> führen wir folgende Annahmen ein:

a) Für jeden Kanal  $\beta$  gibt es einen Minimalwert  $R_\beta$  von  $r_\beta$  mit  $V_\beta = 0$  für  $r_\beta > R_\beta$ .

b)  $(\chi_\beta, \chi_\gamma)_{r_\beta} = 0$  für  $r_\beta > R_\beta$ ,  $\gamma \neq \beta$ . Um diese Skalarprodukte durchzuführen, drücken wir die Koordinaten der Wellenfunktion  $\chi_\gamma$  als Funktion der Koordinaten der Wellenfunktion  $\chi_\beta$  und  $r_\beta$  aus. Die Integration im Skalarprodukt wird über alle Koordinaten von  $\chi_\beta$  erstreckt. Somit ist dieses eine Funktion von  $r_\beta$ .

<sup>8</sup> Im allgemeinen bedeuten runde Klammern skalare Produkte. Die Integration wird immer erstreckt über alle

Variablen mit Ausnahme derer, die rechts unten an der Klammer explizit angegeben sind.

Die Annahmen a) und b) sind sicher richtig für  $R_\beta \rightarrow \infty$ . Für endliche Werte von  $R_\beta$  drückt a) die Tatsache aus, daß die Kernkräfte eine kurze Reichweite haben, und b) besagt, daß in jenem Gebiet des Konfigurationsraumes, in dem die Funktion  $\chi_\beta$  ihren Maximalwert annimmt, der Wert von  $\chi_\gamma$  sehr klein ist ( $\gamma \neq \beta$ ). Den Teil des Konfigurationsraumes, der durch die Bedingung  $r_\beta < R_\beta$  für alle  $\beta$  definiert ist, nennt man inneres Gebiet.

In der vorliegenden Entwicklung lassen wir die nicht geöffneten Kanäle außer Betracht, deren Beitrag zu der Wellenfunktion des Systems in  $\Psi'_a$  enthalten ist. Damit folgt aus der Definition Gl. (5) und der Annahme b)

$$(\Psi'_a)_{R_\beta} = 0, \quad (\partial \Psi'_a / \partial r_\beta)_{R_\beta} = 0. \quad (15)$$

Diese Bedingungen bedeuten, daß sowohl die Wellenfunktion der Relativbewegung im Kanal  $\beta$  als auch ihre Normalableitung am Rande des inneren Gebietes stetig sind.

Nun führen wir<sup>4, 9</sup> ein System von Funktionen  $X_s$  ein, die Eigenfunktionen der gesamten HAMILTON-Funktion mit  $E_s$  als Eigenwerten sind

$$H X_s = E_s X_s. \quad (16)$$

Wir fordern, wenn wir uns auf Drehimpuls Null für die einfallenden Teilchen beschränken, für sie die Randbedingung

$$(\partial (r_\beta X_s) / \partial r_\beta)_{R_\beta} = 0. \quad (16 \text{ a})$$

Die Eigenwerte  $E_s$  sind reell. Die Funktionen sind orthogonal und mögen normiert sein:

$$(X_s, X_{s'}) = \delta_{ss'}. \quad (16 \text{ b})$$

Wir nehmen weiter an, daß  $H$  ein gegen Zeitumkehr invarianter Operator ist, und daß daher die Eigenfunktionen  $X_s$  reell angesetzt werden können. Das so definierte Funktionensystem wird als vollständig angenommen.

Wir entwickeln  $\Psi'_a$  im inneren Gebiet nach dem System der  $X_s$

$$\Psi'_a = \sum_s c_{sa}(E) X_s \quad (17)$$

mit  $c_{sa}(E) = (X_s, \Psi'_a).$  (17 a)

Diese Koeffizienten hängen nur von der Energie  $E$

des Systems ab. Aus Gln. (1) und (16) folgt

$$c_{sa}(E) = \frac{1}{E_s - E} \{ (H X_s, \Psi'_a) - (X_s, H \Psi'_a) - (X_s, (H - E) \Phi_a) \}. \quad (18)$$

Durch Anwendung des GREENSchen Satzes auf das innere Gebiet bekommen wir

$$(X_s, H \Psi'_a) = (H X_s, \Psi'_a),$$

da die Oberflächenterme wegen Gl. (15) verschwinden. Damit reduziert sich Gl. (18) auf

$$c_{sa}(E) = - \frac{1}{E_s - E} (X_s, (H - E) \Phi_a). \quad (19)$$

Wegen Gln. (17) und (19) können wir schließlich Gl. (14) als

$$(T_\beta - \varepsilon_\beta) \varphi_{a\beta}(r_\beta) = - (\chi_\beta, V_\beta \Phi_a)_{r_\beta} + \sum_s \frac{1}{E_s - E} (\chi_\beta, V_\beta X_s)_{r_\beta} (X_s, (H - E) \Phi_a) \quad (20)$$

schreiben.

Eine andere Form für Gl. (20) kann man aus Gl. (5) gewinnen. Wegen der Gln. (6), (17) und (19) nimmt die Definition Gl. (5) folgende Gestalt an:

$$\varphi_{a\beta}(r_\beta) = (\chi_\beta, \Phi_a)_{r_\beta} - \sum_s \frac{1}{E_s - E} (\chi_\beta, X_s) (X_s, (H - E) \Phi_a). \quad (21)$$

Im Anhang wird der Zusammenhang zwischen dem hier aufgestellten Formalismus und dem *S*-Matrix-Formalismus untersucht.

## 2. Die gemittelte Amplitude

Im folgenden beschränken wir uns auf Reaktionen, bei welchen der einzige geöffnete Kanal der Eingangskanal ist. Ferner nehmen wir an, daß der Bahndrehimpuls im Eingangskanal Null ist. Dies ist der Fall z. B. bei Reaktionen mit Neutronen, deren Energie genügend klein und kleiner als die Energie des ersten angeregten Zustandes des beschossenen Kernes ist (die Kopplung mit dem elektromagnetischen Felde sei vernachlässigt).

Wir wählen jetzt ein Energieintervall  $I$ , dessen Schwerpunkt bei  $\varepsilon_{a0}$  liegt, und das viel größer als der Abstand zwischen benachbarten Resonanzen des *compound*-Kernes ist, aber doch genügend klein, um Größen, wie die Wellenzahl  $k_a$  des einfallenden Teilchens, als konstant ansehen zu können. Mit einer geeigneten Gewichtsfunktion  $g(\varepsilon_a - \varepsilon_{a0}, I)$  mitteln wir

<sup>4</sup> J. M. BLATT u. V. F. WEISSKOPF, Theoretical Nuclear Physics, John Wiley & Sons, New York 1952.

die Amplitude der auslaufenden Welle im Eingangskanal und definieren<sup>10</sup>

$$\bar{S}(\varepsilon_0) = \int_0^\infty g(\varepsilon' - \varepsilon_0, I) S(\varepsilon') d\varepsilon'. \quad (22)$$

Dies ist gerade die Amplitude der auslaufenden Welle von

$$\bar{\varphi}(\mathbf{r}, \varepsilon_0) = \int_0^\infty g(\varepsilon' - \varepsilon_0, I) \varphi(\mathbf{r}, \varepsilon') d\varepsilon', \quad (23)$$

wenn wir nur im Wechselwirkungsbereich, d. h. für  $r \leq R$  mitteln und die so gewonnene Wellenfunktion im Eingangskanal nach außen fortsetzen. Statt der von FESHBACH, PORTER und WEISSKOPF<sup>1</sup> benutzten Gewichtsfunktion

$$g(\varepsilon - \varepsilon_0, I) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\varepsilon - \varepsilon_0| > I/2, \\ 1/I & \text{für } |\varepsilon - \varepsilon_0| \leq I/2, \end{cases} \quad (24)$$

verwenden wir die Gewichtsfunktion<sup>11</sup>

$$g(\varepsilon - \varepsilon_0, I) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + I^2}. \quad (25)$$

Da wir  $I \ll \varepsilon_0$  annehmen, können wir dann die Integrale in den Gln. (22) bzw. (23) von  $-\infty$  bis  $+\infty$  erstrecken, ohne merkliche Fehler zu begehen.

Nun gilt mit der durch Gl. (25) definierten Gewichtsfunktion wegen des CAUCHYSchen Satzes für jede in der oberen Hälfte der komplexen  $E$ -Ebene analytische Funktion  $f(E)$ , für die der Grenzwert von  $|f(E)|/|E|$  für  $|E| \rightarrow \infty$  in dieser Halbebene beschränkt ist, die Gleichung

$$\bar{f}(\varepsilon_0) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} g(\varepsilon' - \varepsilon_0, I) f(\varepsilon') d\varepsilon' = f(\varepsilon_0 + iI). \quad (26)$$

Für die Wellenfunktion  $\varphi(\mathbf{r}, \varepsilon)$  gilt sinngemäß Gl. (20), die wir noch einmal mit der jetzigen Bezeichnung (nur ein Kanal geöffnet) anschreiben

$$(T - \varepsilon) \varphi(\mathbf{r}, \varepsilon) = -(\chi, V \chi \varphi(\mathbf{r}, \varepsilon))_{\mathbf{r}} \quad (27)$$

$$+ \sum_s \frac{1}{E_s - E} (\chi, V X_s)_{\mathbf{r}} (X_s, (H - E) \chi \varphi(\varepsilon)).$$

Im Anhang wird gezeigt, daß sowohl  $\varphi(\mathbf{r}, \varepsilon)$  als auch  $(T - \varepsilon) \varphi(\mathbf{r}, \varepsilon)$  die für die Gültigkeit von Gl. (26) erforderlichen Voraussetzungen erfüllen.

Der Mittelwert der linken Seite von Gl. (27) kann ohne Schwierigkeit ausgewertet werden, da  $E$  als

<sup>10</sup>  $S_{\alpha\beta}$  gibt die Amplitude der auslaufenden Welle im Kanal  $\beta$  an, wenn die Kernreaktion im Kanal  $\alpha$  angefangen hat. Da wir hier nur mit einem Kanal zu tun haben, werden wir den Index  $\alpha$  weglassen und  $S_{\alpha\alpha} = S$  setzen.

<sup>11</sup> G. E. BROWN, Rev. Mod. Phys. 31, 893 [1959].

konstant über  $I$  angesehen werden darf:

$$\overline{(T - \varepsilon) \varphi(\mathbf{r}, \varepsilon)} = (T - \varepsilon_0 - iI) \varphi(\mathbf{r}, \varepsilon_0 + iI) \quad (28)$$

$$\approx (T - \varepsilon_0) \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \varepsilon_0).$$

Für den ersten Term der rechten Seite von Gl. (27) gilt

$$\overline{(\chi, V \chi \varphi(\mathbf{r}, \varepsilon))_{\mathbf{r}}} = (\chi, V \chi \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \varepsilon_0))_{\mathbf{r}}, \quad (29)$$

da sowohl  $\chi$  als auch  $V$  unabhängig von der Energie der einfallenden Teilchen sind.

Um den Mittelwert des zweiten Gliedes der rechten Seite zu gewinnen, definieren wir

$$a_s(\mathbf{r}, \varepsilon) = (\chi, V X_s)_{\mathbf{r}} (X_s, (H - E) \chi \varphi(\varepsilon)). \quad (30)$$

Nun ist nach einer einfachen Rechnung

$$\overline{\sum_s \frac{a_s(\mathbf{r}, \varepsilon)}{E_s - E}} = \sum_s \left( \pi \frac{E_s - E_0}{I} + i\pi \right) \cdot g(E_s - E_0, I) a_s(\mathbf{r}, \varepsilon_0 + iI). \quad (31)$$

Als Folge der Gln. (30) und (26) gilt

$$a_s(\mathbf{r}, \varepsilon_0 + iI) = (\chi, V X_s)_{\mathbf{r}} (X_s, (H - E_0) \chi \bar{\varphi}(\varepsilon_0)). \quad (32)$$

Mit Hilfe der Gln. (28), (29), (31) und (32) können wir jetzt die aus Gl. (27) gewonnene Gleichung für  $\bar{\varphi}(\mathbf{r}, \varepsilon_0)$  in der Form

$$(T - \varepsilon_0) \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \varepsilon_0) = (-\mathcal{V} + \mathcal{W}_1 + i\mathcal{W}_2) \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \varepsilon_0) \quad (33)$$

schreiben.

Hier ist bei

$$\mathcal{V} \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \varepsilon_0) = (\chi, V \chi \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \varepsilon_0))_{\mathbf{r}}, \quad (33 \text{ a})$$

$$\mathcal{W}_1 \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \varepsilon_0) = \frac{\pi}{I} \sum_s (E_s - E_0) g(E_s - E_0, I) \cdot (\chi, V X_s) (X_s, (H - E_0) \chi \bar{\varphi}(\varepsilon_0)), \quad (33 \text{ b})$$

$$\mathcal{W}_2 \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \varepsilon_0) = \pi \sum_s g(E_s - E_0, I) (\chi, V X_s)_{\mathbf{r}} \cdot (X_s, (H - E_0) \chi \bar{\varphi}(\varepsilon_0)). \quad (33 \text{ c})$$

$\mathcal{V}$  stellt in einer ersten Näherung das gemittelte Potential dar, das das einfallende Teilchen im Kerninneren vorfindet; die Absorption des Teilchens ist durch den HERMITESchen Teil von  $\mathcal{W}_2$  und den anti-HERMITESchen Teil von  $\mathcal{W}_1$  bestimmt.

Ebenso läßt sich Gl. (21), die jetzt in der Form

$$\sum_s \frac{1}{E_s - E} (\chi, X_s)_{\mathbf{r}} (X_s, (H - E) \chi \varphi(\varepsilon)) = 0$$

geschrieben sei, mitteln. Man findet

$$(\mathcal{W}_1' + i\mathcal{W}_2') \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \varepsilon_0) = 0. \quad (34)$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1' \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \varepsilon_0) &= \frac{\pi}{I} \sum_s (E_s - E_0) g(E_s - E_0, I) \\ &\quad \cdot (\chi, X_s)_{\mathbf{r}} (X_s, (H - E_0) \chi \bar{\varphi}(\varepsilon_0)), \\ \mathcal{W}_2' \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \varepsilon_0) &= \pi \sum_s g(E_s - E_0, I) (\chi, X_s)_{\mathbf{r}} \\ &\quad \cdot (X_s, (H - E_0) \chi \bar{\varphi}(\varepsilon_0)). \end{aligned} \quad (35)$$

Gl. (34) besagt, daß die Projektion  $(\chi, X_s)_{\mathbf{r}}$  von  $X_s$  auf die Funktion  $\chi$  einen Nullbeitrag zu Gl. (33) liefert, wie man sich leicht überzeugen kann. Wir werden diese Tatsache in der numerischen Abschätzung des komplexen Potentials in Abschn. 3. benutzen.

### 3. Berücksichtigung des Pauli-Prinzips

Im vorigen Abschnitt konnte die Wellenfunktion des Systems nur in bezug auf die Koordinaten der Teilchen des Zielkernes antimetrisch sein. Wir wollen jetzt diesen Mangel beheben, indem wir die Wellenfunktion des Systems antimetrisch in den Koordinaten aller Nukleonen schreiben.

Falls die kinetische Energie des einfallenden Neutrons kleiner ist als die Schwelle für irgendwelche Reaktion, so ist das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion des Systems gegeben durch

$$\Psi \simeq \left( 1 - \sum_{i=1}^A P_{0i} \right) \chi^{(0)} \varphi^{(0)}, \quad (36)$$

wobei  $\chi^{(0)}$  die Wellenfunktion des beschossenen Kernes ist, die von den Koordinaten der Teilchen 1 bis  $A$  abhängt und in diesen antimetrisch ist;  $\varphi^{(0)}$  ist die Wellenfunktion der Relativbewegung und beschreibt einen Neutronzustand mit einer bestimmten Spinzrichtung. Der Operator  $P_{0i}$  ist folgendermaßen definiert

$$P_{0i} \chi^{(0)} \varphi^{(0)} = (-1)^{i-1} \chi^{(i)} \varphi^{(i)},$$

wobei  $\chi^{(i)}$  von den Koordinaten des Teilchens  $i$  nicht abhängen soll, also

$$\chi^{(i)} = \chi(0, \dots, i-1, i+1, \dots, A).$$

Der Index  $i$  faßt dabei Orts-, Spin- und Isospinkoordinaten zusammen.

Die Wellenfunktion der Relativbewegung ist durch

$$\varphi^{(i)} = (-1)^i (\chi^{(i)}, \Psi)_{\mathbf{r}_i}$$

gegeben. Die Wellenfunktion des Gesamtsystems werde in der Form

$$\Psi = \Phi + \Psi'$$

$$\text{mit} \quad \Phi = \left( 1 - \sum_{i=1}^A P_{0i} \right) \chi^{(0)} \varphi^{(0)} \quad (37)$$

geschrieben.  $\Phi$  und  $\Psi'$  sind offenbar antimetrisch in den Koordinaten aller Teilchen. Die Funktion  $\Psi'$  wird dann nach den Funktionen  $X_s$  entwickelt, die antimetrisch in den Koordinaten aller Teilchen sein sollen.

Die Gleichung für  $\varphi^{(0)}$  ist durch Gl. (20) gegeben, wenn wir dort für  $\Phi_a$  die durch Gl. (37) definierte Größe  $\Phi$  einsetzen

$$\begin{aligned} (T_0 - \varepsilon) \varphi^{(0)} &= -(\chi^{(0)}, V_0 (1 - A P_{01}) \chi^{(0)} \varphi^{(0)})_{\mathbf{r}_0} \\ &\quad + (A+1) \sum_s \frac{1}{E_s - E} (\chi^{(0)}, V_0 X_s)_{\mathbf{r}_0} \\ &\quad \cdot (X_s, (H - E) \chi^{(0)} \varphi^{(0)}). \end{aligned} \quad (38)$$

Wie im Anhang gezeigt wird, befriedigt  $\varphi^{(0)}$  die in Zusammenhang mit Gl. (26) für  $f(\varepsilon)$  geforderten Voraussetzungen. Dann können wir wieder das Mittelungsverfahren anwenden und erhalten für  $\bar{\varphi}^{(0)}$  folgende Gleichung

$$(T_0 - \varepsilon_0) \bar{\varphi}^{(0)}(\mathbf{r}_0, \varepsilon_0) = (-\mathcal{V} + \mathcal{W}_1 + i \mathcal{W}_2) \bar{\varphi}^{(0)}(\mathbf{r}_0, \varepsilon_0) \quad (39)$$

mit

$$\mathcal{V} \varphi^{(0)}(\mathbf{r}_0, \varepsilon_0) = (\chi^{(0)}, V_0 (1 - A P_{01}) \chi^{(0)} \bar{\varphi}^{(0)}(\varepsilon_0))_{\mathbf{r}_0}, \quad (40 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 \varphi^{(0)}(\mathbf{r}_0, \varepsilon_0) &= \frac{\pi}{I} \sum_s (E_s - E_0) g(E_s - E_0, I) \\ &\quad \cdot (\chi, V_0 X_s)_{\mathbf{r}_0} (X_s, (H - E_0) \chi^{(0)} \bar{\varphi}^{(0)}(\varepsilon_0)) (A+1), \end{aligned} \quad (40 \text{ b})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2 \varphi^{(0)}(\mathbf{r}_0, \varepsilon_0) &= \pi \sum_s g(E_s - E_0, I) (\chi, V_0 X_s)_{\mathbf{r}_0} \\ &\quad \cdot (X_s, (H - E_0) \chi^{(0)} \bar{\varphi}^{(0)}(\varepsilon_0)) (A+1). \end{aligned} \quad (40 \text{ c})$$

In der folgenden Abschätzung des komplexen Potentials wollen wir die rechte Seite von Gl. (39) durch lokale, energieabhängige Potentiale  $\mathcal{V}(\varepsilon)$  und  $\mathcal{W}(\varepsilon)$  approximieren. In dieser Näherung wird dann Gl. (39) geschrieben

$$(T_0 - \varepsilon_0) \bar{\varphi}^{(0)}(\mathbf{r}, \varepsilon_0) = (-\mathcal{V}(\varepsilon) + i \mathcal{W}(\varepsilon)) \bar{\varphi}^{(0)}(\mathbf{r}, \varepsilon_0). \quad (41)$$

Für die nun folgende Abschätzung der Potentiale  $\mathcal{V}(\varepsilon)$  und  $\mathcal{W}(\varepsilon)$  nehmen wir an

a) Die Wellenfunktionen sowohl des Zielkernes als auch des COMPOUND-Kernes sind durch SLATER-Determinanten dargestellt. Für schwere Kerne ist der Ortsanteil der Einteilchenfunktionen durch im Kernvolumen normierte ebene Wellen gegeben.

b) Die Wechselwirkung zwischen den Teilchen ist eine Summe von Zweiteilchen-Wechselwirkungen

$$V_0 = \sum_{i=1}^A v_{0i} \quad (42)$$

mit  $v_{0i} = f_{0i}(1 + x P_{0i}^r)$ . (42 a)

Die Größe  $f_{0i}$  hängt dabei nur vom Abstand der Teilchen 0 und  $i$  ab;  $P_{0i}^r$  ist ein Operator, der die Ortskoordinaten der Teilchen 0 und  $i$  austauscht.

### a) Realteil des Potentials

Wir nehmen an, daß der Realteil des komplexen Potentials durch Gl. (40 a) gegeben ist. Der Beitrag der Terme (40 b) und (40 c) ist vermutlich sehr klein im Vergleich mit (40 a), wenn man die durch das Eindringen des Neutrons hervorgerufene Polarisation im Zielkern vernachlässigen kann. Unter den obigen Annahmen a) und b) nimmt Gl. (40) die Form

$$\mathcal{V} \bar{\varphi}^{(0)} = \mathcal{V}' \bar{\varphi}^{(0)} + \mathcal{V}'' \bar{\varphi}^{(0)} \quad (43)$$

an, wobei gilt

$$\mathcal{V}' \bar{\varphi}^{(0)} = \int d\mathbf{r}_1 f_{01} (\alpha \varrho(\mathbf{r}_1) + \beta \varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) P_{01}^r) \bar{\varphi}^{(0)}, \quad (43 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'' \bar{\varphi}^{(0)} &= - \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 f_{02} \varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \\ &\quad \cdot \left( \frac{\alpha}{4} \varrho(\mathbf{r}_2) + \frac{\beta}{4} \varrho(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \right) P_{01}^r \bar{\varphi}^{(0)} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \alpha = 1 - x/4, \quad \beta = -\frac{1}{4} + x \quad \text{und} \quad (43 \text{ c})$$

$$\varrho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{4}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}, \quad \varrho(\mathbf{r}) = \frac{2k_F^3}{3\pi^2} = \frac{A}{\Omega},$$

$$\Omega = 4\pi R^3/3, \quad R = r_0 A^{1/3}, \quad k_F = (9\pi/8 r_0^3)^{1/3} \sim 1,52 r_0.$$

$\varrho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  bzw.  $\varrho(\mathbf{r})$  sind die gemischte bzw. gewöhnliche Dichte. Wir haben angenommen, daß im Zielkern die Zahl der Protonen gleich der Zahl der Neutronen ist.

Wir entwickeln  $\bar{\varphi}(\mathbf{r}_1)$  um  $\mathbf{r}_0$  in eine TAYLOR-Reihe. Da  $\varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0)$  nur von  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|$  abhängt, verschwinden alle ungeraden Terme dieser Entwicklung. Wegen der kurzen Reichweite von  $f_{0i}$  dürfte es genügen, Terme bis zur zweiten Ordnung zu berücksichtigen. Damit nimmt Gl. (43 a) die Form

$$\mathcal{V}' \bar{\varphi}^{(0)} = [\alpha a_1 + \beta a_2 + \beta a_3 T_0] \bar{\varphi}^{(0)} = \mathcal{V}(\varepsilon) \bar{\varphi}^{(0)} \quad (44)$$

an mit

$$\begin{aligned} a_1 &= \int d\mathbf{r}_1 f_{01} \varrho(\mathbf{r}_1), \quad a_2 = \int d\mathbf{r}_1 f_{01} \varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0), \\ a_3 &= -\frac{2M}{\hbar^2} \int d\mathbf{r}_1 f_{01} \varrho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)^2}{2}. \end{aligned} \quad (44 \text{ a})$$

Man kann sehr leicht zeigen, daß die rechte Seite von Gl. (43 b) in einer ersten BORNschen Näherung verschwindet. Hierzu benutzen wir  $\bar{\varphi}^{(0)} \approx \bar{\varphi}_\varepsilon^{(0)}$  mit

$$T_0 \bar{\varphi}_\varepsilon^{(0)}(\mathbf{r}_0) = (\varepsilon - V(\varepsilon)) \bar{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{r}_0) = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M} \bar{\varphi}_\varepsilon^{(0)}(\mathbf{r}_0). \quad (45)$$

Der Realteil des Potentials ist somit durch  $V(\varepsilon)$  in Gl. (44) gegeben. Wegen Gln. (44) und (45) gilt

$$\varepsilon_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M} + V(\varepsilon_0) = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M^*} + \alpha a_1 + \beta a_2, \quad (46)$$

wobei  $M^* = (1 + \beta a_3)^{-1} M$  (47)

die sogenannte effektive Masse ist. Außerdem gilt

$$V(\varepsilon_0) = \alpha a_1 + \beta a_2 + \beta a_3 \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M} = \frac{\alpha a_1 + \beta a_2 + \beta a_3 \varepsilon_0}{1 + \beta a_3}. \quad (48)$$

### b) Imaginärteil des Potentials

Wir wollen jetzt die beiden Faktoren auf der rechten Seite von Gl. (40 c) berechnen. Da in den Skalarprodukten nur Ein- und Zweiteilchenoperatoren auftreten, können wir uns auf solche Zustände beschränken, bei denen sich nicht mehr als zwei Nukleonen außerhalb der FERMI-Kugel des Zielkernes befinden. Mit Hilfe einer zu Gl. (34) ähnlichen Gleichung kann man zeigen, daß die Zustände  $X_s$ , bei denen sich nur ein Nukleon außerhalb der FERMI-Kugel befindet, nicht zu Gl. (47) beitragen. Somit ist die Wellenfunktion  $X_s$  des compound-Zustandes  $s$  durch die Quantenzahlen eines unbesetzten Zustandes  $j$  innerhalb der FERMI-Kugel und der beiden Zustände  $j'$  und  $s$  außerhalb der FERMI-Kugel bestimmt.

Im Grenzfall  $\Omega \rightarrow \infty, I \rightarrow 0$ , läßt sich die Summe in Gl. (40 c) folgendermaßen ausdrücken:

$$\sum_s q(E_s - E_0, I) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\Omega^3}{(2\pi)^9} \sum \int d\mathbf{k}_j d\mathbf{k}_{j'} d\mathbf{k}_s \delta(\varepsilon)$$

$(\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_j - \varepsilon_{j'} - \varepsilon_s)$ , wobei die Summe über alle Spins und Isospins der Zustände  $j, j'$  und  $s$  durchgeführt und die Integration über  $\mathbf{k}_j$  bzw.  $\mathbf{k}_{j'}$ ,  $\mathbf{k}_s$  über alle Punkte erstreckt wird, die innerhalb bzw. außerhalb der FERMI-Kugel vom Radius  $k_F$  liegen.  $\varepsilon_j, \varepsilon_{j'}$  bzw.  $\varepsilon_s$  sind die Energien der Zustände  $j, j'$  bzw.  $s$ . Sie setzen sich aus der kinetischen Energie der Zustände und der aus der Wechselwirkung mit den anderen Teilchen herrührenden potentiellen Energie  $V$  zusammen

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2M} + V(\varepsilon_n) = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2M^*} + \alpha a_1 + \beta a_2$$

(hierbei steht der Index  $n$  für irgendwelche der Indizes  $o, j, j'$  oder  $s$ ).

Somit bekommen wir für Gl. (40 c)

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2 \bar{\varphi}^{(0)} &= \int \{ 2(2 - x + 2x^2) \mathcal{W}_{j'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &\quad - (1 - 8x + x^2) \mathcal{W}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{\varphi}^{(0)}(\mathbf{r}') \} d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (49)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{\pi}{(2\pi)^9} \int d\mathbf{k}_j d\mathbf{k}_{j'} d\mathbf{k}_s \delta(\varepsilon) \\ &\quad \cdot e^{i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_{j'} - \mathbf{k}_j) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} v(\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_{j'}) v(\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_s). \end{aligned} \quad (49 \text{ a})$$

$$\text{Die Funktion } v(k) = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} f(\mathbf{r}) \quad (49 \text{ b})$$

ist die FOURIER-Transformierte des Ortsanteils der Zweikörperkräfte.  $\bar{\varphi}^{(0)}$  hängt von der Ortskoordinate  $\mathbf{r}$  und dem Spin und Isospin des Zustandes  $o$  ab.

Wir behandeln Gl. (49) in erster BORNscher Näherung

$$\mathcal{W}_2 \bar{\varphi}^{(0)} \approx \mathcal{W}_2 \bar{\varphi}_\varepsilon^{(0)} = \mathcal{W}' \bar{\varphi}_\varepsilon^{(0)}, \quad (50)$$

wobei  $\bar{\varphi}_\varepsilon^{(0)}$  durch Gl. (45) definiert ist. Damit gilt

$$W'(\varepsilon) = \int d\mathbf{r}' W_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-i k_\varepsilon (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \quad (51)$$

Die Ausdrücke (49 a) gewinnen die Gestalt

$$W'_{j'} = \frac{\pi M^*}{(2\pi)^6 \hbar^2} \int d\mathbf{k}_{j'} d\Omega' k |v(\mathbf{k}-\mathbf{k}')|^2, \quad (51 \text{ a})$$

$$W'_s = \frac{\pi M^*}{(2\pi)^6 \hbar^2} \int d\mathbf{k}_{j'} d\Omega' k v(\mathbf{k}-\mathbf{k}') v(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \quad (51 \text{ b})$$

$$(|\mathbf{k}|=|\mathbf{k}'|) \text{ mit } \mathbf{k}=\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_{j'}, \mathbf{k}'=\mathbf{k}_s-\mathbf{k}_{j'} \text{ und} \\ d\Omega'=2\pi \sin \vartheta' d\vartheta', \cos \vartheta' = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')/|\mathbf{k}|^2.$$

Der Integrationsbereich für  $d\Omega'$  ist durch die Bedingung  $k_s, k_{j'} > k_F$  gegeben.

Wir setzen jetzt die Näherungen Gl. (44) und (50) für  $\mathcal{V}$  und  $W_2$  in Gl. (39) ein, um

$$(T_0 - \varepsilon_0) \bar{\varphi}^{(0)} = -[\alpha a_1 + \beta a_2 + \beta a_3 T_0] \bar{\varphi}^{(0)} + i W' \bar{\varphi}^{(0)}$$

zu bekommen. Der Vergleich mit Gl. (41) gibt für  $V(\varepsilon)$  den in Gl. (47) angegebenen Wert; für den Imaginär-

teil erhält man

$$W = W'/(1 - \beta a_3). \quad (52)$$

Um die Gl. (48) und (52) auszuwerten, verwenden wir für den Ortsanteil der Zweikörperkräfte ein YUKAWA-Potential der Form

$$f_{01} = V_0 (e^{-\mu r}/\mu r) \quad (53)$$

( $r=|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|$ ) und wählen  $x=1$  (SERBER-Kraft). Dann ist  $\alpha=\beta=3/4$ . Aus den Gl. (44 a) und (49 b) erhält man

$$a_1 = \frac{3 V_0}{(r_0 \mu)^3}, \quad a_2 = \frac{8 V_0}{\pi} \left[ \frac{k_F}{\mu} - \arctg \frac{k_F}{\mu} \right],$$

$$a_3 = -\frac{2 M}{\hbar^2} \frac{4 V_0 k_F}{\pi \mu} \frac{2 k_F^2}{(k_F^2 + \mu^2)}, \quad (54 \text{ a})$$

$$v(k) = \frac{4 \pi V_0}{\mu} \frac{1}{\mu^2 + \frac{1}{4} k^2}. \quad (54 \text{ b})$$

Um die rechte Seite der Gl. (51 a) grob abzuschätzen, setzen wir  $v(k) \approx v(0)$  und erhalten<sup>12</sup>

$$W'_{j'} = W'_s = \frac{4 M^* V_0^2 k_0 k_F^3}{3 \pi \hbar^2 \mu^6} \left\{ \begin{array}{l} (1 - 7 k_F^2/5 k_0^2), \\ (1 - 7 k_F^2/5 k_0^2 + [2 k_F^2/5 k_0^2] [2 - k_0^2/k_F^2]^{1/2}), \end{array} \right. \quad k_0 \geq \sqrt{2} k_F, \quad (55)$$

Für<sup>13</sup>  $r_0 = 1,8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ ,  $V_0 = -25 \text{ MeV}$  und  $\mu = 0,85 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-1}$  bekommen wir

$$V(\varepsilon) = -40,5 \text{ MeV} \pm 0,5 \varepsilon, \quad W(0) = 5,3 \text{ MeV}.$$

Diese Werte stimmen mit den aus den empirischen Daten gewonnenen Werten für die Parameter des komplexen Potentials, nämlich<sup>14</sup>

$$V(0) = -43 \text{ MeV}, \quad W(0) = 3,4 \text{ MeV}$$

ziemlich gut überein.

Ich möchte besonders Herrn Professor W. HEISENBERG für die Anregung zu dieser Arbeit und für zahlreiche fördernde Besprechungen danken. Für aufschlußreiche Unterredungen danke ich ferner den Herren Professor A. BOHR, Dr. W. BRENIG, Professor G. LÜDERS und Professor G. SÜSSMANN, sowie den Kollegen am Max-Planck-Institut für Physik (Göttingen) und am Universitetets Institut for Teoretisk Fysik (Kopenhagen). Die Arbeit wurde in diesen Instituten ausgeführt, deren Direktoren, den Herren Professoren W. HEISENBERG und N. BOHR, ich für die gastliche Aufnahme danken möchte.

Mein Dank gebührt außerdem der Ford Foundation und dem Max-Planck-Institut für Physik für finanzielle Unterstützung sowie der Universidad Nacional Autónoma de México und dem Instituto Nacional de la Investigación Científica für großzügige Beurlaubung während der Zeit meines Aufenthaltes in Europa.

## Anhang

Wir wollen hier den Zusammenhang zwischen dem im Abschnitt 2 eingeführten Formalismus für Kernreaktionen und dem S-Matrix-Formalismus aufzeigen. Ferner untersuchen wir die Lage der Pole der Wellenfunktion der Relativbewegung in der Energiediagonale.

Durch Anwendung des GREENSchen Satzes auf das innere Gebiet bekommen wir für den zweiten Faktor im zweiten Summanden von Gl. (21)

$$[X_s, (H-E) \varphi_a] = (E_s - E) (X_s, \varphi_a) \quad (A 1) \\ - \sum_\gamma (2\pi \hbar^2 R_\gamma / M_\gamma)^{1/2} y_{s\gamma} (r_\gamma \varphi_{a\gamma})' R_\gamma,$$

wobei wir die Randbedingung Gl. (16 a) benutzt haben. Hier steht  $M_\gamma$  für die reduzierte Masse der Teilchen im Kanal  $\gamma$ ; ferner ist

$$y_{s\gamma} = (2\pi \hbar^2 R_\gamma / M_\gamma)^{1/2} (\chi_\gamma, X_s)_{R\gamma}, \quad (A 2)$$

und der Strich bedeutet Ableitung nach  $r_\gamma$ .

Setzen wir Gl. (A 1) in Gl. (20) und (21) ein, dann erhalten wir wegen der Vollständigkeit des Systems der Funktionen  $X_s$

$$(T - \varepsilon_\beta) \varphi_{a\beta} (r_\beta) = - \sum_\gamma \left( \frac{2\pi \hbar^2 R_\gamma}{M_\gamma} \right)^{1/2} \quad (A 3) \\ \cdot \sum_s \frac{(\chi_\beta, V_\beta X_s)_{R\beta} y_{s\gamma}}{E_s - E} (r_\gamma \varphi_{a\gamma})' R_\gamma$$

<sup>12</sup> B. HAHN, D. G. RAVENHALL u. R. HOFSTADTER, Phys. Rev. **101**, 1131 [1956].

<sup>14</sup> V. F. WEISSKOPF, Rev. Mod. Phys. **29**, 174 [1957].

<sup>13</sup> S. HAYAKAWA, M. KAWAI u. K. KIKUCHI, Progr. Theor. Phys. **13**, 415 [1955].

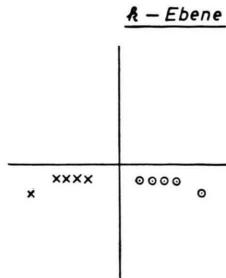


Abb. 1. Pole der Funktion  $S(\varepsilon)$  in der Impulsebene ( $k$ -Ebene).

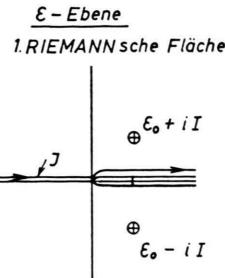


Abb. 2. Erste RIEMANNSche Fläche der Energieebene ( $\varepsilon$ -Ebene). Es gibt keine Pole der Funktion  $S(\varepsilon)$  in dieser Ebene.  
 $\oplus$  Pole der Gewichtsfunktion  $g(\varepsilon - \varepsilon_0, I)$ ;  
 $I$  Integrationsweg für das Integral in  
Gl. (26).

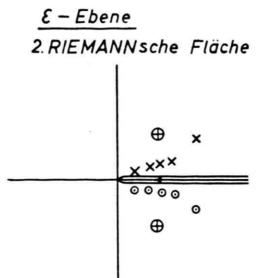


Abb. 3. Zweite RIEMANNSche Fläche der Energieebene. Die Pole der Funktion  $S(\varepsilon)$  im 3. bzw. 4. Quadranten der  $k$ -Ebene liegen in der oberen bzw. unteren  
Hälfte dieser Fläche der  $\varepsilon$ -Ebene.

und

$$\varphi_{\alpha\beta}(r_\beta) = \sum_\gamma \left( \frac{2\pi\hbar^2 R_\gamma}{M_\gamma} \right)^{1/2} \sum_s \frac{(\chi_\beta, X_s) r_\beta y_{s\gamma}}{E_s - E} (r_\gamma \varphi_{\alpha\gamma})'_{R_\gamma}. \quad (\text{A } 4)$$

Um Ausdrücke für die Elemente der  $S$ -Matrix zu gewinnen, brauchen wir nur den Wert von  $\varphi_{\alpha\beta}$  am Rande des inneren Gebietes. Wir werten Gl. (A 4) für  $r_\beta = R_\beta$  aus und erhalten

$$(r_\beta \varphi_{\alpha\beta})_{R_\beta} \sum_\gamma \left( \frac{M_\beta R_\beta}{M_\gamma R_\gamma} \right)^{1/2} \mathcal{R}_{\beta\gamma}(E) R_\gamma (r_\gamma \varphi_{\alpha\gamma})'_{R_\gamma}, \quad (\text{A } 5)$$

mit

$$\mathcal{R}_{\beta\gamma}(E) = \sum_s \frac{y_{s\beta} y_{s\gamma}}{E_s - E} \quad (\text{A } 6)$$

als WIGNERScher  $\mathcal{R}$ -Matrix. Für  $r_\beta \geq R_\beta$  gewinnt die Wellenfunktion  $\varphi_{\alpha\beta}$  der Relativbewegung im Kanal  $\beta$  ihren asymptotischen Wert, den wir für Drehimpuls 0 schreiben als<sup>9</sup>

$$r_\beta \varphi_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{M_\beta}{4\pi\hbar k_\beta}} [\delta_{\alpha\beta} e^{-ik_\beta r_\beta} - S_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta) e^{ik_\beta r_\beta}] \quad (\text{A } 7)$$

( $\varepsilon_\beta = \hbar^2 k_\beta^2 / 2 M_\beta$ ). Wir setzen Gl. (A 7) in Gl. (A 5) ein und erhalten

$$S = \omega \frac{1+i\mathbf{B}\mathcal{R}(E)\mathbf{B}}{1-i\mathbf{B}\mathcal{R}(E)\mathbf{B}} \omega \quad (\text{A } 8)$$

mit  $\omega_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} e^{-i x_\alpha}$ ,  $B_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} x_\alpha^{1/2}$ ,  $x_\alpha = k_\alpha R_\alpha$ . (A 9)

Somit haben wir bewiesen, daß der hier eingeführte Formalismus dem  $S$ -Matrix-Formalismus vollkommen äquivalent ist.

Für Einkanalreaktionen hat die  $S$ -Matrix nur ein Element, nämlich

$$S(\varepsilon) = e^{-2ikR} \frac{1+i\mathbf{k}\mathcal{R}(E)}{1-i\mathbf{k}\mathcal{R}(E)}, \quad (\text{A } 10)$$

wobei wir den Index  $\alpha$  weggelassen haben; es gilt

$$\mathcal{R}(E) = \mathcal{R}_{\alpha\alpha}(E) = \sum_s \frac{y_{s\alpha}^2}{E_s - E}. \quad (\text{A } 11)$$

Für diesen Fall lauten Gl. (A 3) und (A 4):

$$(T - \varepsilon) \varphi(r, \varepsilon) = i \sqrt{2\hbar k R} e^{-i k R} \quad (\text{A } 12) \\ \cdot \left( \sum_s (\chi, V X_s) r y_s / (E_s - E) \right) [1 - i k R \mathcal{R}(E)]^{-1}$$

und

$$\varphi(r, \varepsilon) = -i \sqrt{2\hbar k R} e^{-i k R} \quad (\text{A } 13) \\ \cdot \left( \sum_s (\chi, X_s) r y_s / (E_s - E) \right) [1 - i k R \mathcal{R}(E)]^{-1},$$

wo wir die Gl. (A 7) und (A 10) benutzt haben, um die in Gl. (A 3) und (A 4) auftretenden Größen ( $r \varphi$ )' zu auszuwerten.

Es ist nun zu bemerken, daß für alle  $r$  sowohl die Pole von  $(T - \varepsilon) \varphi(r, \varepsilon)$  als auch die von  $\varphi(r, \varepsilon)$  mit denen von  $S(E)$  übereinstimmen, da für  $E \rightarrow E_s$  der Wert von der rechten Seite von (A 12) und (A 13) endlich ist. Nun liegen die Pole der Funktion  $S(E)$ , wie aus allgemeinen Gründen erschlossen werden kann<sup>15</sup>, in der unteren Hälfte der komplexen  $k$ -Ebene oder in dem zweiten RIEMANNSchen Blatt der komplexen  $\varepsilon$ -Ebene. Dies ist in den Abb. 1, 2 und 3 dargestellt (gebundene Zustände sind ausgeschlossen).

Um den Mittelwert der Gl. (A 12) bzw. (A 13) auszuwerten, können wir Gl. (26) benutzen, indem wir  $e^{-i k_0 R}$  für  $e^{-i k R}$  setzen. Die resultierenden Energiefunktionen befriedigen die Bedingungen, die wir für  $f(\varepsilon)$  gefordert haben; sie sind analytisch in der ersten RIEMANNSchen Fläche der  $\varepsilon$ -Ebene mit dem asymptotischen Wert Null für  $|\varepsilon| \rightarrow \infty$ .

Falls wir wie in Abschn. 4 das PAULI-Prinzip befriedigen wollen, sind die analytischen Eigenschaften der entsprechenden Streufunktion dieselben wie im oben erwähnten Fall. Im Abschn. 4 haben wir so viele Kanäle wie Teilchen in die Kernteilung eintreten. Da sowohl der Wert der Funktion der Relativbewegung in jedem Kanal als auch ihre Ableitung am Kernrande unabhängig vom Kanal ist, finden wir gemäß Gl. (A 5) für die

<sup>15</sup> W. SCHÜTZER u. J. TIOMNO, Phys. Rev. **83**, 249 [1951]. — M. MOSHINSKY, Anais Acad. Brasil. Cienc. **25**, 343 [1953].

Wellenfunktion im Kanal  $i$

$$(r_i \varphi_i) R_i = R_i (\varphi_i r_i)' R_i \sum_{i=0}^A R_{ii}(\varepsilon) .$$

Hierbei ist  $\sum_{i=0}^A R_{ii}(\varepsilon) = \sum_s \left( \sum_i y_{si}^2 \right) / (E_s - E)$

wieder eine WIGNERSche  $R$ -Funktion. Somit hat  $S_{ii}(E)$ , die Amplitude der auslaufenden Welle im Kanal  $i$ , dieselben analytischen Eigenschaften wie die Funktion  $S(\varepsilon)$  in Gl. (A 10). Es sei bemerkt, daß der Wert der Streuamplitude unabhängig vom Kanal ist, wie zu erwarten war.

## Messung des asymptotischen Neutronenspektrums in einfachen Wassergeometrien\*

Von K. H. BECKURTS

Aus dem Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik, Kernforschungszentrum Karlsruhe  
(Z. Naturforsch. 16 a, 611—619 [1961]; eingegangen am 29. April 1961)

Es wird über ein Meßverfahren berichtet, das die Beobachtung des asymptotischen Neutronenspektrums in gepulsten Neutronenfeldern erlaubt. Das Verfahren wird auf einfache Wassergeometrien angewandt (Würfel mit geometrischen Formfaktoren im Bereich  $0,1 \dots 1 \text{ cm}^{-2}$ ). Dabei wird jeweils das Flußspektrum in der Mitte des Streumediums und das Ausflußspektrum beobachtet. Der aus integralen Messungen bekannte Diffusionskühlungseffekt kann deutlich als eine Verschiebung der Spektren mit abnehmenden Lineardimensionen der Streumedien beobachtet werden.

In einer typischen Moderatorensubstanz (Graphit,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{D}_2\text{O}$ , Be) werden schnelle Neutronen innerhalb sehr kurzer Zeit abgebremst und thermalisiert. Sie gelangen dabei in einen asymptotischen Zustand, in dem sich ihre mittlere Energie nicht mehr ändert, da sie im Zeitmittel bei Stößen mit den Teilchen der Moderatorensubstanz ebensoviel Energie abgeben, wie sie aus deren thermischer Bewegung gewinnen. Ist der Moderator sehr ausgedehnt und fängt er Neutronen nicht ein, so liegt im asymptotischen Zustand ein echter Gleichgewichtszustand zwischen Neutronen und Moderator vor; die Energieverteilung der Neutronen ist exakt eine MAXWELL-Verteilung mit der Moderatortemperatur  $T_0$ . Das trifft auch dann noch zu, wenn das Streumedium Neutronen einfängt und sein Einfangquerschnitt — wie dies meist der Fall ist — dem  $1/v$ -Gesetz gehorcht. Ist dagegen das Streumedium so klein, daß merkliche Neutronenverluste durch Ausfluß auftreten, so wird das asymptotische Spektrum in der Regel keine ungestörte Gleichgewichtsverteilung sein, vielmehr wird der energieabhängige Mechanismus der Diffusion dieses Spektrums mitunter empfindlich beeinflussen. Dabei wird auch eine Ortsabhängigkeit der asymptotischen Verteilung auftreten, die insbesondere in der Nähe von Grenzflächen spürbar wird.

Bei bisherigen Aufnahmen differentieller Neutronenspektren wurde nicht das asymptotische, sondern das „stationäre“ Spektrum, d. h. die Energieverteilung der Neutronen in einem Reaktor oder in einem Streumedium, in dem sich stationäre Neutronenquellen befinden, beobachtet<sup>2-5</sup>. Dieses stationäre Spektrum ist ein Mittelwert über die Neutronenergieverteilung während aller Stadien des Brems- und Thermalisierungsprozesses und enthält daher wesentliche Bestandteile „nichtasymptotischer“ Neutronen. Feinheiten wie etwa die Modifikation des asymptotischen Spektrums durch Diffusionseffekte lassen sich dabei nicht erkennen. Es wurde daher ein Meßverfahren entwickelt, das die Beobachtung asymptotischer Spektren erlaubt. Über dieses Meßverfahren und seine Anwendung auf einfache Wassergeometrien wird in der vorliegenden Arbeit berichtet.

Für die Bestimmung von Reaktorspektren haben Untersuchungen der asymptotischen Energieverteilung keine direkte Bedeutung. Sie sind dagegen interessant für die Analyse von integralen Experimenten an gepulsten Neutronenfeldern, die in den letzten Jahren von vielen Autoren angestellt worden sind. Bei diesen Experimenten werden periodische Stöße schneller Neutronen in eine Moderatorensubstanz

\* Eine vorläufige Mitteilung erschien in anderem Zusammenhang<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> K. H. BECKURTS, Nucl. Instrum. 11, 144 [1960].

<sup>2</sup> M. J. POOLE, J. Nucl. Energy 5, 325 [1957].

<sup>3</sup> R. S. STONE u. R. E. SLOVACZEK, Nucl. Sci. Eng. 6, 466 [1959].

<sup>4</sup> J. R. BEYSTER et al., Trans. Amer. Nucl. Soc. 3, 1, 157 [1960].

<sup>5</sup> V. I. MOSTOVOR et al., Genf 1958 P/2152.